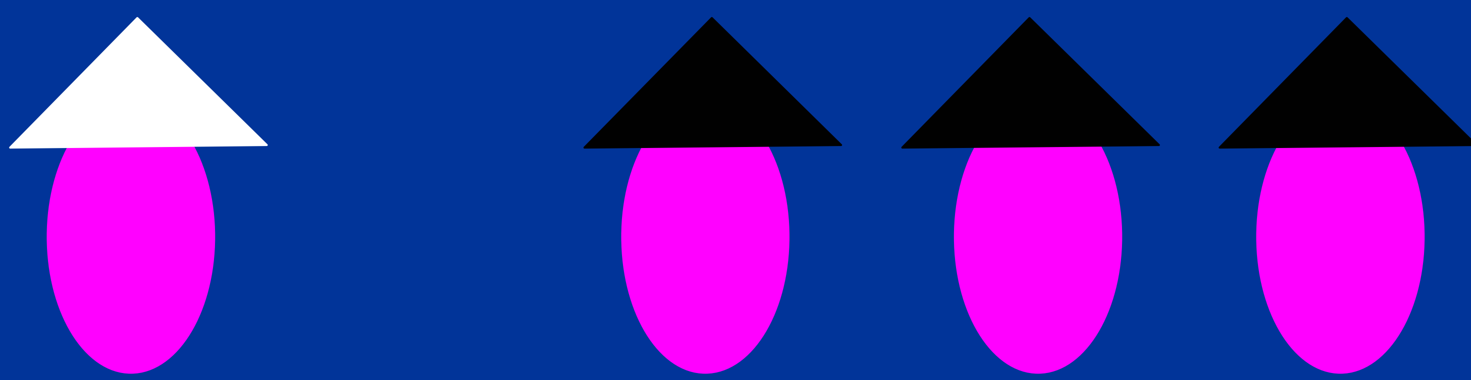
Matemáticas Discretas

L. Enrique Sucar
INAOE

Inducción y Recursión



Inducción y Recursión

- Inducción matemática
- Relaciones de recurrencia
- Solución de relaciones de recurrencia

Inducción matemática

- Técnica de prueba que se aplica a casos que tienen que ver con número naturales
- Intuitivamente:
  - Si probamos algo para $n = k$, y luego lo probamos para $n = k + 1$, podemos concluir que es cierto para toda n (mayor que k)

Inducción matemática

- Formalmente:
  1. (base de inducción): Si el enunciado es verdadero para $n = n_0$
  2. (paso de inducción): y el enunciado es verdadero para $n = k + 1$, asumiendo que es verdadero para $n = k$ ($k >= n_0$)
  3. Entonces: el enunciado es verdadero para todos los números naturales $n >= n_0$

Inducción matemática

- Este principio es una consecuencia de la definición de números naturales. Dado S, el conjunto de números naturales:

1. El número natural $n=n_0$ (1) esta en S
2. Si el número k está en S, también lo está k + 1

Ejemplo

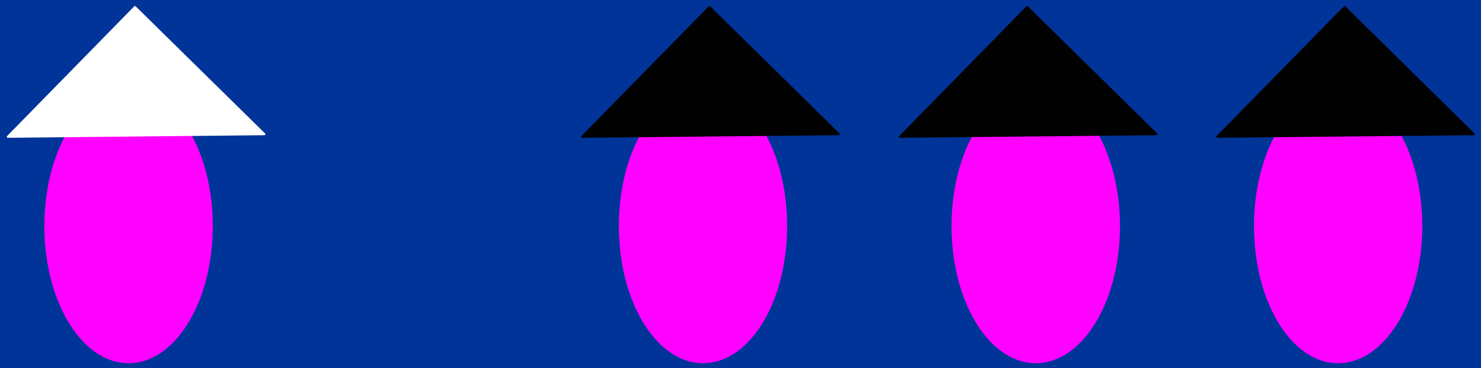
- Tenemos estampas de 5 y 3 pesos. Demostrar que es posible hacer estampas de denominación mayor o igual a 8.

1. Es posible hacer estampas de 8 pesos (5 + 3)
2. Si es posible hacer de K es posible de hacer de K + 1. Dos casos:
   a. Si hay una estampa de 5 en K, se substituye por dos de 3 (6) y se tiene K + 1
   b. Si no hay de 5, entonces hay puras de 3. Se substituyen tres de 3 (9) por dos de 5 (10) y se tiene K + 1

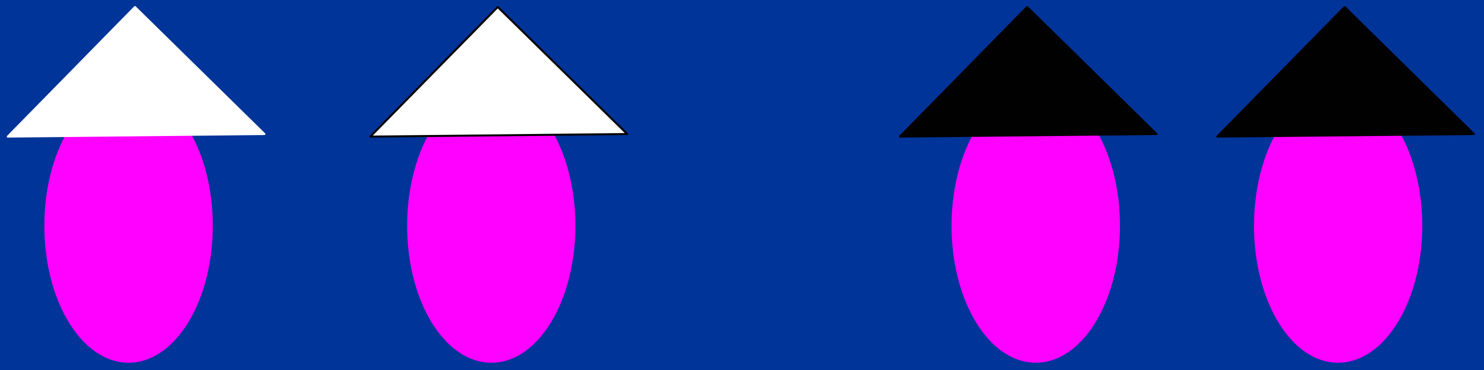
Ejemplo

- El rey llamó a todos los matemáticos de su reino, y le dijo que les iba a poner sombreros blancos o negros a cada uno, pero ellos no saben cual. Pueden mirar a los otros pero no hablar entre ustedes. Voy a regresar cada hora y aquellos que sepan que tienen sombreros blancos me lo tienen que decir. Demuestra que si hay N sombreros blancos, a la hora N todos aquellos con sombreros blancos lo han informado al rey.

Ejemplo



Ejemplo



Demostración

1. N =1, hay un solo sombrero blanco, al ver el matemático que todos los demás tienen sombreros negros el debe tener blanco (el rey dijo que había de los dos tipos)
2. N >1, asume que si hubiera k matemáticos que tienen sombreros blancos ya lo hubieran informado al rey a la hora k. Supongamos que hay k + 1, si ven que no todos sus colegas no han informado al rey para la hora k, implica que hay más de k con sombrero blanco; por lo que lo informan al rey a la hora k + 1.

Relaciones de recurrencia

- Una relación de recurrencia para la secuencia $a_0, a_1, \ldots a_n$ es una ecuación que relaciona a_n con alguno de sus predecesores $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$
- Las condiciones iniciales son valores dados en forma explícita para un número finito de términos $a_i, a_j, \ldots a_k$

Ejemplo (Fibonacci)

- Recurrencia:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

- Condiciones iniciales:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 2$$

- Secuencia:

1, 2, 3, 5, 8, 13, …

Ejemplo – interés compuesto

- Si invierto 1000 pesos a un interés compuesto de 7 % anual, cuanto dinero tendré al final de 5 años?
- Especificar la solución como una relación de recurrencia

Ejemplo – interés compuesto

- En general:
  - Recurrencia: $C_n = C_{n-1} + \text{interés} * C_{n-1} = (1 + \text{interés}) * C_{n-1}$
  - Condición inicial: C_0 = inversión
- Para el ejemplo:
  - $C_0 = 1000$
  - $C_1 = 1000 * 1.07 = 1070$
  - $C_2 = 1070 * 1.07 = 1000 * (1.07)^2 = 1144.90$
  - …

Solución de ecuaciones de recurrencia

- Una solución para una relación de recurrencia consisten en encontrar una fórmula explícita para el término a_n
- Veremos dos tipo de métodos:
  - Un método iterativo
  - Un método especial para relaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Método iterativo

- Se escribe el término a_n en función de los términos a_{n-1}, a_{n-2}, …
- Luego se reemplaza el término a_{n-1} por algunos de sus predecesores
- Luego el término a_{n-2} …
- Se continua hasta obtener una fórmula explícita en términos de las condiciones iniciales

Ejemplo

- Relación: $a_n = a_{n-1} + 3; a_1 = 2$
- Solución:
  - Para n-1: $a_{n-1} = a_{n-2} + 3$
  - Substituyendo: $a_n = (a_{n-2} + 3) + 3 = a_{n-2} + 2 * 3$
  - Para n-2: $a_{n-2} = a_{n-3} + 3$
  - Substituyendo: $a_n = (a_{n-3} + 3) + 2 * 3 = a_{n-3} + 3 * 3$
  - En general: $a_n = a_{n-k} + k * 3$
  - Haciendo k=n-1: $a_n = a_{n-n+1} + (n-1) * 3 = a_1 + 3 (n-1)$
  - Como $a_1 = 2$: $a_n = 2 + 3 (n-1)$

Ejemplo

- La población de perros en Tonantzintla es de 1000 (n=0) y el crecimiento al instante n es del 10% de la población en el tiempo n-1
  - Determinar la relación de recurrencia
  - Determinar una fórmula explícita

Recurrencia

- Condición inicial: $p_0 = 1000$
- Recurrencia:
  - Incremento: $p_n - p_{n-1} = 0.1p_{n-1}$
  - Por lo tanto: $p_n = p_{n-1} + 0.1p_{n-1} = 1.1p_{n-1}$

Solución

- La solución explícita se puede obtener en forma iterativa:
  - $p_n = 1.1p_{n-1} = p_n\ 1.1(1.1p_{n-2}) = p_n\ 1.1(1.1(1.1p_{n-3})\ ) = \ldots$
  - $p_n = 1.1p_{n-1} = (1.1)^2\, p_{n-2} = (1.1)^3\, p_{n-3} = \ldots$
  - En general: $p_n = (1.1)^n\, p_0$
  - En este caso: $p_n = (1.1)^n\ 1000$

Relaciones de Recurrencia Lineales

- Una *relación de recurrencia lineal homogénea de orden k con coeficientes constantes* (rrlhcc) se puede escribir de la siguiente forma:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

- Donde los coeficientes c_i son constantes, y se tienen las condiciones iniciales: a_0 , a_1 …, a_{k-1}
- Por ejemplo, la relación de Fibonacci es una relación lineal homogénea de orden 2

Solución *rrlhcc* - ejemplo

- Relación: $a_n = 5a_{n-1} – 6a_{n-2}$; $a_0=7$, $a_1=16$
- Solución:
  - Asumimos que es de la forma t^n
  - Entonces: $t^n = 5t^{n-1} – 6t^{n-2} \rightarrow t^n - 5t^{n-1} + 6t^{n-2} = 0$
  - Dividiendo entre t^{n-2}: $t^2 - 5t + 6 = 0$
  - Dos soluciones: $t = 2$, $t = 3$
  - Entonces se puede demostrar que la solución es de la forma: $U_n = b2^n + d3^n$

Solución *rrlhcc* - ejemplo

- Solución (continuación):
  - Para encontrar los coeficientes consideramos las condiciones iniciales, de forma que:
  - $7 = U_0 = b2^0 + d3^0$; $16 = U_1 = b2^1 + d3^1$
  - Al resolverlas, obtenemos: $b = 5, d = 2$
  - Entonces la solución es: $a_n = 5 * 2^n + 2 * 3^n$

Solución rrlhcc – 2do orden

- En general, la solución de una rrlhcc de segundo orden, $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$
- Es de la forma: $a_n = b\, r_1^n + d\, r_2^n$
- Donde r_1 y r_2 son raíces de la ecuación: $t^2 - c_1 t - c_2 = 0$
- Los coeficientes b, d se determinan de las condiciones iniciales

Otro ejemplo: *Fibonacci*

- Recurrencia:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

- Condiciones iniciales:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 2$$

- Entonces la solución es de la forma:

$$f_n = b\ r_1^n + d\ r_2^n$$

- y las raíces la obtenemos al resolver:

$$t^2 - t - 1 = 0$$

… continuación:

- Resolviendo la ecuación anterior, las raíces son:

$$r_1 = 1.618;\ r_2 = -.618$$

- Por lo que la ecuación tiene la forma:

$$f_n = b\ (1.618)^n + d\ (-0.618)^n$$

- Obteniendo los coeficientes en base a las condiciones iniciales:

$$f_n = 0.751\ (1.618)^n - 0.276\ (-0.618)^n$$

Referencias

- Liu, Cap. 1, 10
- Johnsonbaugh, Cap. 1, 5

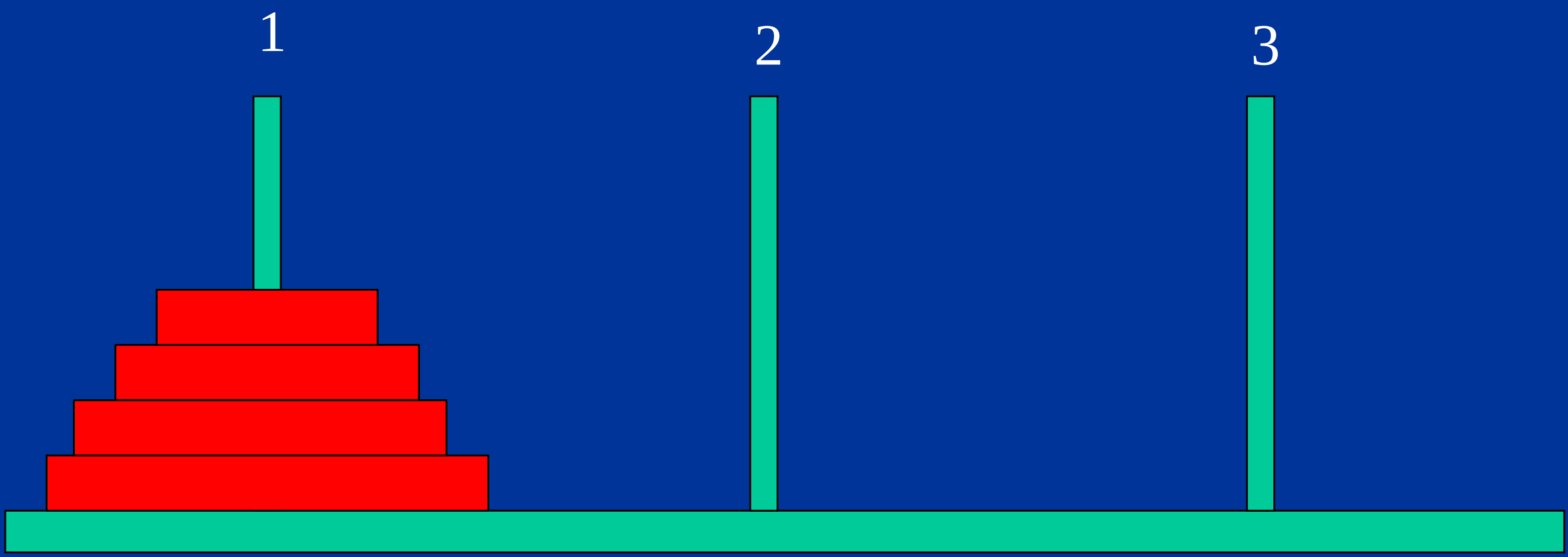
Ejercicios

1. Demuestra que todo entero positivo n mayor a 2 es primo o producto de primos
2. Demostrar que:

   $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1) / 6$, para $n >= 1$

3. Para el problema de las Torres de Hanoi encuentra una relación de recurrencia para el número de movimientos para mover n discos del poste 1 al 3

Torres de Hanoi



Ejercicios

4. Para la siguiente secuencia encuentra la relación de recurrencia y las condiciones iniciales:

   3, 6, 9, 15, …

5. Determina una fórmula explícita para el número de movimientos de n discos, C_n, para el problema de las Torres de Hanoi