Matemáticas Discretas

L. Enrique Sucar

INAOE

Permutaciones y Combinaciones

Contenido

- Introducción
- Reglas de la suma y el producto
- Permutaciones
- Combinaciones
- Generación de permutaciones
- Teorema del Binomio

Introducción

- En ocasiones, interesa saber cuántas diferentes permutaciones/combinaciones de elementos se pueden generar a partir de cierto conjunto, por ejemplo:
  – Cuántos comités diferentes de 3 personas puede haber a partir de un grupo de 10 individuos?
  – De cuántas diferentes maneras pueden repartirse 5 cartas a partir de 52 cartas (pokar)?
  – De una urna con 10 bolas, 6 rojas y 4 negras, cuántas formas diferentes existen al extraer 4 bolas, asumiendo que cada vez que se saca una, se regresa a la urna?

Introducción

- En esta sesión veremos la teoría matemática que nos permite hacer éstos cálculos, así como algunos ejemplos de aplicación

Experimento

- Un proceso físico que tiene un número de posibles resultados
- Ejemplos:
  – Tirar una moneda y observar que cara queda arriba
  – Tirar n monedas y observar las caras que quedan arriba en cada moneda
  – Sacar m pelotas de una caja con n pelotas
  – Seleccionar 3 miembros para un comité de un grupo de n personas
  – De n personas que fuman, observar cuántas tienen cáncer

Regla del Producto

- Si hacemos 2 experimentos, uno con *n* posibles resultados, y otro con *m* posibles resultados, el número total de resultados al realizar ambos experimentos es *m x n*
- Ejemplos:
  - A partir de 10 senadores y 10 diputados se va a hacer un comité con 3 senadores y 4 diputados, de cuántas maneras diferentes se puede conformar dicho comité

Regla de la Suma

- Si hacemos 2 experimentos, uno con n posibles resultados, y otro con m posibles resultados, el número total de resultados al realizar exactamente uno de los experimentos es $m + n$
- Ejemplos:
  – A partir de 10 senadores y 10 diputados se va a hacer un comité con 3 miembros, todos ellos diputados o senadores, de cuántas formas se puede conformar el comité?

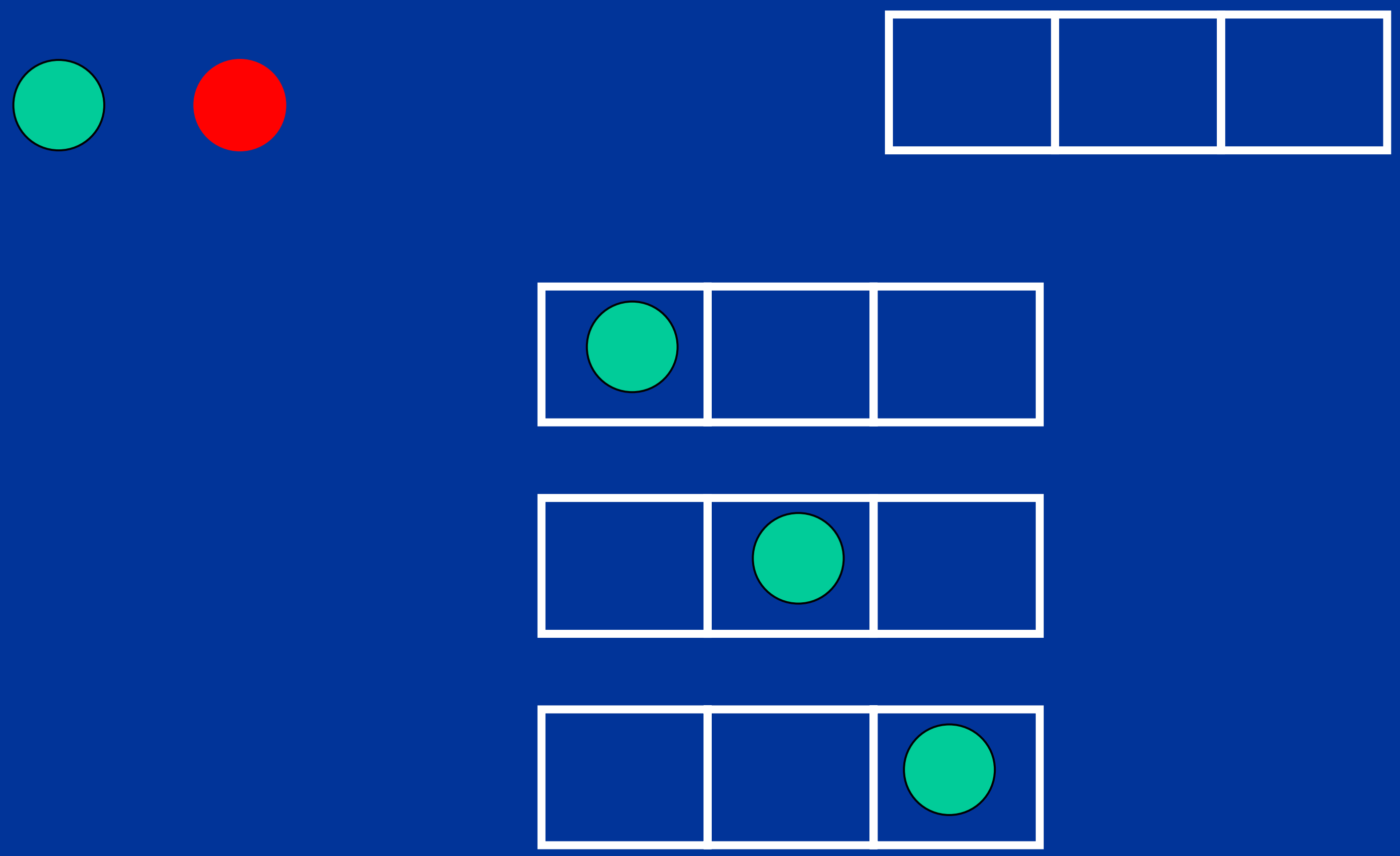
Permutaciones

- Dados *n* objetos, queremos obtener las diferentes formas de ordenar *r* de éstos objetos
- Por ejemplo, dada las letras a,b,c, de cuántas formas podemos arreglar 2 de ellas:

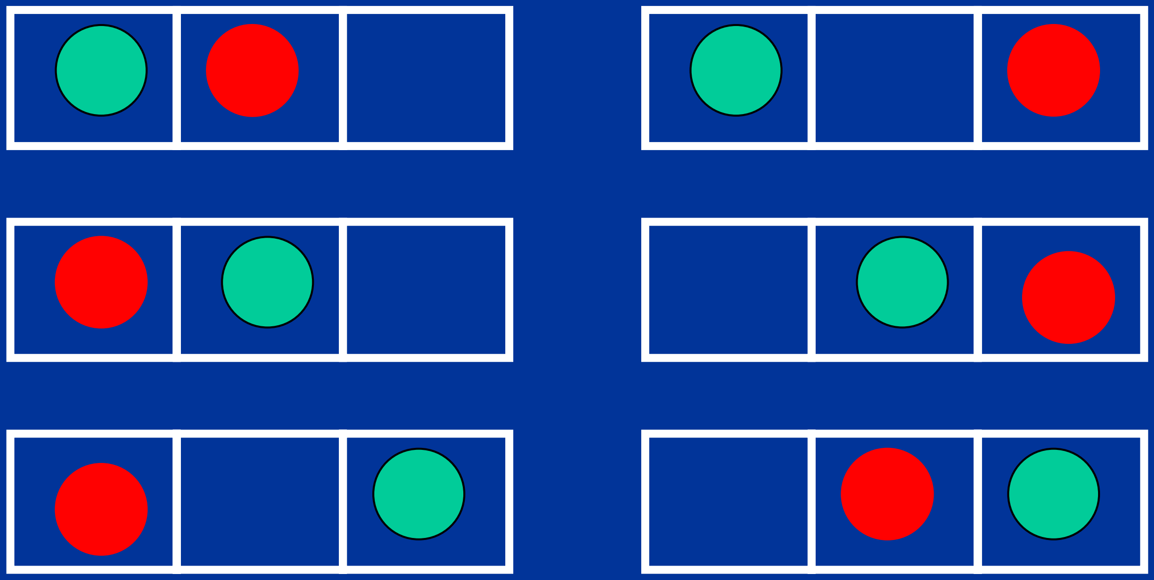
ab, ba, ac, ca, bc, cb

- Esto se conoce como las permutaciones de *r* de *n*, $P(n, r)$

Permutaciones



Permutaciones



Permutaciones

- El número de permutaciones se obtiene de la siguiente manera:

$$P(n,r) = n! / (n-r)!$$

- Donde *n*! es el factorial de *n*, definido como:

$$n! = n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ x\ 2\ x\ 1$$

Ejemplos:

- De cuántas maneras se pueden colocar 3 pelotas diferentes (azul, verde, rojas) en 10 cajas, si en cada caja sólo cabe una pelota?
- Si hay 7 oficinas, y queremos asignarle una oficina a cada uno de 4 estudiantes, de cuántas formas se pueden asignar las oficinas?
- Cuántos números de 3 dígitos se pueden escribir de forma que no se repitan dígitos?

Permutaciones – Generalización

- Ahora consideramos que tenemos *t* clases de objetos, de forma que los de una clase son indistinguibles entre sí
- Cómo podemos ordenar *n* objetos, con *q1* del tipo *1*, *q2* del tipo *2*, …, *qt* del tipo *t*?
- Por ejemplo, 3 letras, 2 a's y 1 b:

aab, aba, baa

Permutaciones – Generalización

- Esto lo podemos calcular de la siguiente manera:

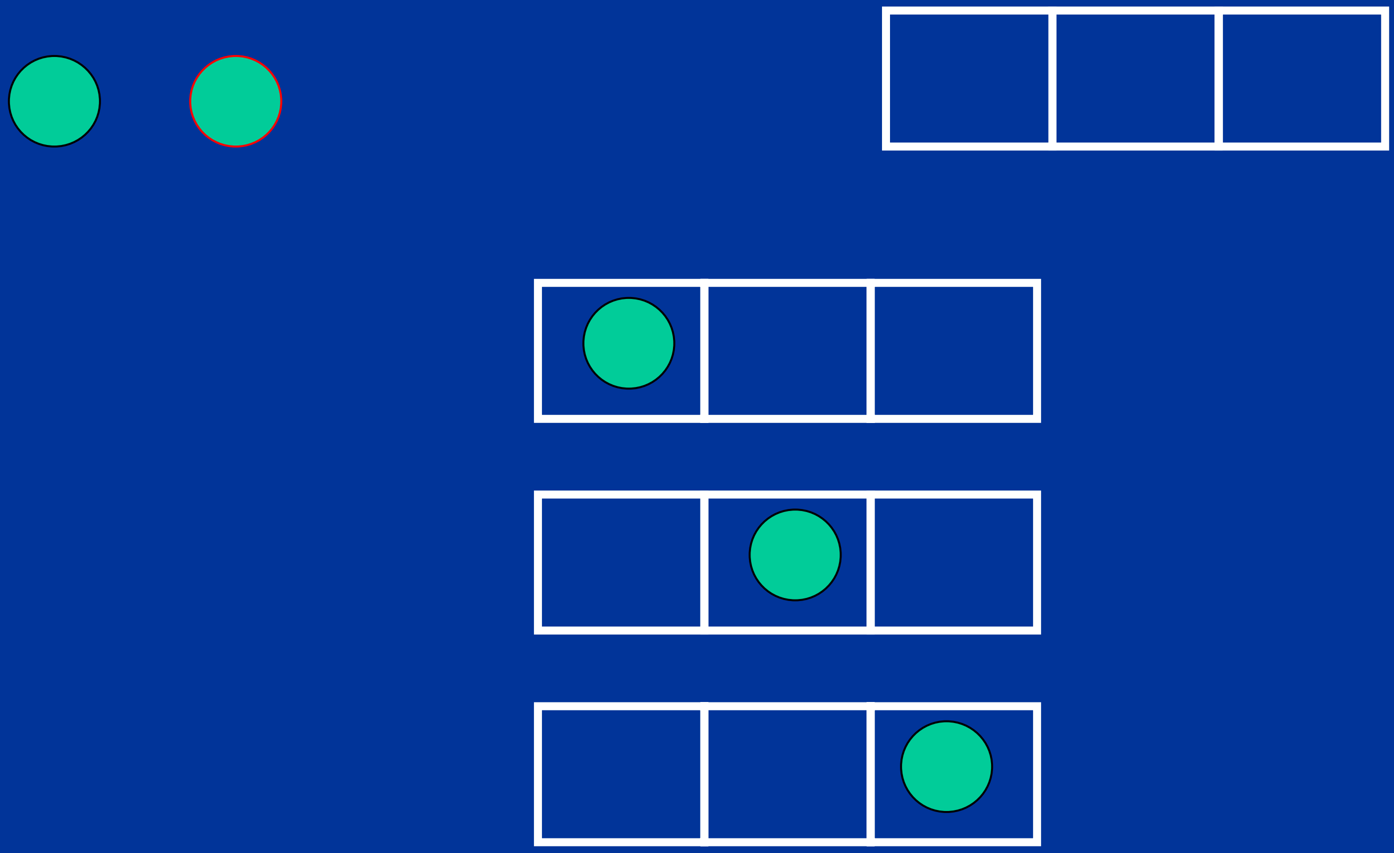
$$n! / (q1!\ q2!\ \ldots\ qt!)$$

- Ejemplos:
  - Para el código morse (puntos y rayas), cuántos mensajes se pueden hacer con dos puntos y tres rayas?
  - Hay 10 oficinas, 2 las va a explorar el robot 1, 5 el robot 2, y 3 el robot 3, de cuántas formas diferentes se pueden organizar los robots para explorar las oficinas?

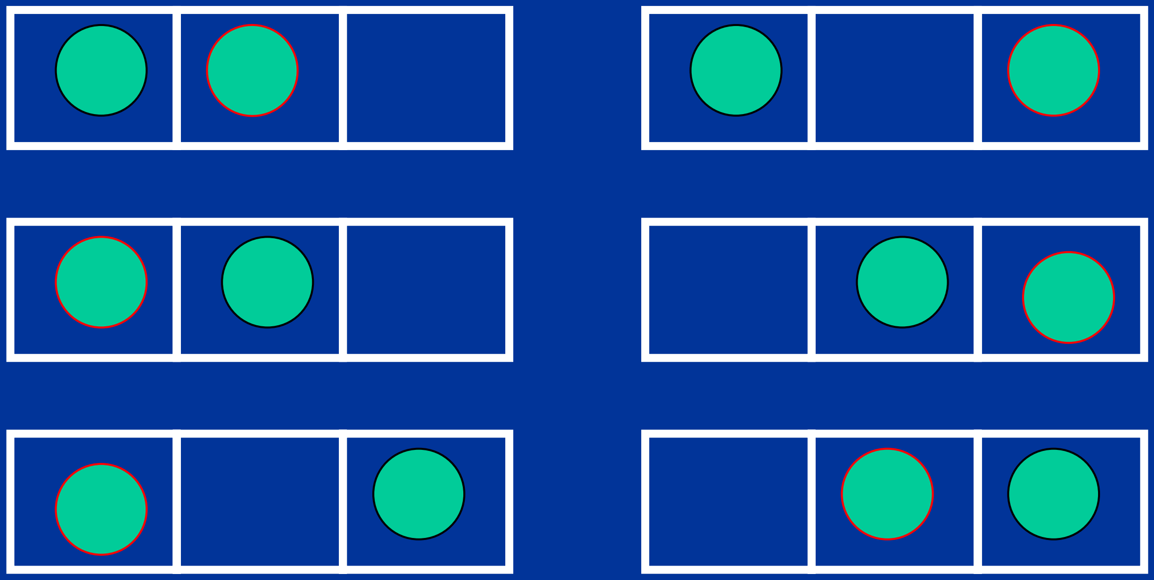
Combinaciones

- Dado que tenemos *n* objetos, de cuántas formas podemos seleccionar *r* de éstos (sin importar el orden)?
- Por ejemplo, tenemos 3 pelotas, una roja, una verde y otra azul, de cuántas formas se pueden sacar 2 pelotas:
  - (roja, verde), (roja, azul), (verde azul)

Combinaciones



Combinaciones



Combinaciones

- Esto son las combinaciones *r* de *n*, o *C(n, r)*, y se obtienen con la siguiente expresión:

$$C(n,r) = n! \,/\, r!\,(n-r)!$$

- Ejemplos:
  - De cuántas formas se pueden colocar 3 pelotas (iguales) en 10 cajas, cada caja puede tener máximo una pelota?
  - Cuántos números binarios de 5 dígitos con 3 unos se pueden tener?
  - Cuántos comités distintos de 3 personas podría haber en este grupo de 60 estudiantes?

Generación de permutaciones

- Cómo generar todas las posibles permutaciones de *n* objetos?
- Si son pocos, lo podemos hacer “a mano”:
  - abc
  - acb
  - bac
  - bca
  - cab
  - cba

Generación de permutaciones

- Si son muchos, ya no es tan fácil!
- Para ello requerimos de un algoritmo para generar las permutaciones
- El algoritmo se basa en asignarle un número consecutivo a cada objeto (1,2, …), de forma que las permutaciones sigan un orden, llamado orden *lexicográfico*

Orden lexicográfico

- En el ejemplo, si hacemos a=1, b=2, c=3, entonces:
  - abc 123
  - acb 132
  - bac 213
  - bca 231
  - cab 312
  - cba 321
- Están ordenadas lexicográficamente

Algoritmo

- Iniciar con la secuencia “menor” de acuerdo al orden (1,2,…, n)
- Dada la secuencia a [a1,a2,…am], generar la siguiente secuencia b [b1,b2, …,bm] tal que:
  - De izquierda a derecha, ai=bi, hasta el máximo posible valor m
  - Sustituir el valor bm, por el valor más pequeño aj, j>m, que sea mayor a bm
  - Ordenar los demás elementos de acuerdo al orden lexicográfico
- Repetir 2 hasta alcanzar la secuencia “mayor” (n, n-1, …, 1)

Ejemplo

- Dado el elemento:
  - 124653
- El valor m=3
  - 124…
- Por lo que el elemento 4 se sustituye por el 5 (el menor de 635 que es mayor a 4):
  - 125…
- Agregando el resto de los elementos:
  - 125346

Permutaciones de r elementos

- El algoritmo anterior se extiende directamente para generar las permutaciones de *r* elementos a partir de *n* objetos

Teorema del Binomio

- Binomio al cuadrado:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

- Binomio al cubo:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- En general:

$$(a + b)^n = ?$$

Teorema de Binomio

- En general, cada término surge de elegir a en n-k factores y b en k factores
- Por ejemplo, para el binomio al cubo:

$$aba, aab, baa \rightarrow 3a^2b$$

$$C(3,1)\ a^2b = 3a^2b$$

- En general, cada término tiene como coeficiente C(n, k)

Teorema de Binomio

- Así, un binomio a la n se puede escribir como:

$$(a + b)^n = C(n,0)\, a^n b^0 + C(n,1)\, a^{n-1} b^1 + \ldots + C(n,n)\, a^0 b^n$$

- Teorema del binomio:

$$(a + b)^n = \Sigma_k\, C(n,k)\, a^{n-k} b^k$$

Triángulo de Pascal

- Una forma de obtener los coeficientes es mediante el triángulo de Pascal
- El triángulo tiene 1's en las orillas, y todos los números interiores son la suma de los 2 de arriba

Triángulo de Pascal

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

Referencias

- [Liu] Capítulo 3
- [Johnsonbaugh] Capítulo 4

Ejercicios

- Cuántos comités diferentes de 3 personas puede haber a partir de un grupo de 10 individuos?
- De cuántas diferentes maneras pueden repartirse 5 cartas a partir de 52 cartas (pokar)?
- De una urna con 10 bolas, 6 rojas y 4 negras, cuántas formas diferentes existen al extraer 4 bolas, asumiendo que cada vez que se saca una, se regresa a la urna?

Ejercicios

- Cuántos comités de 3 estudiantes se pueden generar en el grupo (40 h, 20 m) si en el comité debe haber al menos un hombre y una mujer?
- Genera todas la permutaciones para 5 elementos (en orden lexicográfico)
- Dados 10 problemas, cuántos exámenes diferentes se pueden generar: (a) no importa el orden de los problemas, (b) si importa el orden

Ejercicios

- Extiende el algoritmo para generar permutaciones para r de n elementos
- Un paciente tiene 0, una o dos de 5 posibles enfermedades; y al menos un síntoma de 10 posibles síntomas. ¿Cuántas posibles combinaciones de enfermedades-síntomas puede tener?
- Un robot puede observar de 1 a 3 marcas en un mapa con 50 marcas en cierto momento, cuántas posibles combinaciones de marcas puede observar