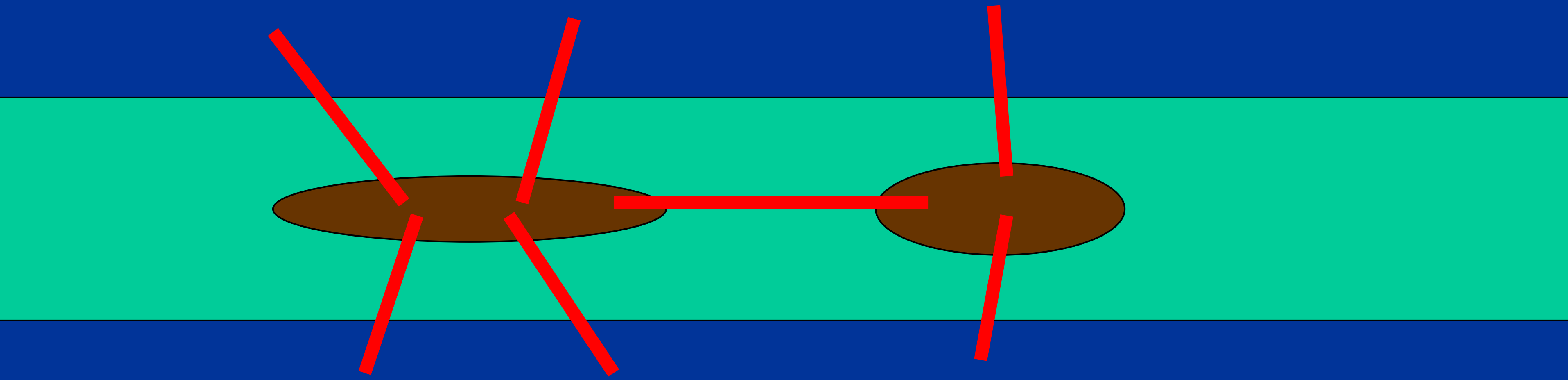
Matemáticas Discretas

L. Enrique Sucar

INAOE

# Teoría de Grafos



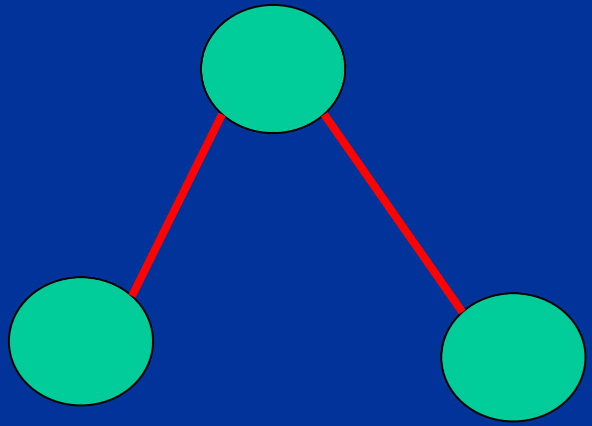
Problema de los puentes de Königsberg [Euler]

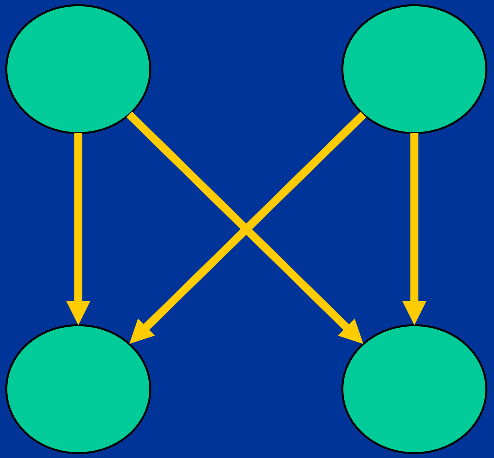
# Teoría de Grafos

- Definición y terminología
- Tipos de grafos
- Trayectorias y circuitos
- Isomorfismo
- Árboles
- *Cliques*
- Grafos triangulados

# Definición

- Un grafo es una representación gráfica de objetos y relaciones binarias entre éstos





# Definición

- Grafo no-dirigido: es un par ordenado (V, E), donde V es un conjunto de nodos y E es un multi-conjunto 2 elementos de V (orillas o arcos)
- Grafo dirigido: es un par ordenado (V, E), donde V es un conjunto de nodos y E es una relación binaria en V

$$G = (V, E)$$

$$E_i = (V_j, V_k)$$

# Definiciones

$E_i = (V_j, V_k)$

- $V_j$ es adyacente a $V_k$
- El grado de un nodo V es el número de orillas incidentes en V
- Teorema 1: el número de vértices de grado impar en un grafo es par

# Definiciones

- Dos orillas asociadas al mismo par de vértices son orillas paralelas
- Una orilla incidente en un solo vértice es un ciclo
- Un vértice que no es incidente en ninguna orilla es un vértice aislado

# Tipos de Grafos

- Grafos no-dirigidos
- Grafos dirigidos
- Grafos de cadenas (*chain graphs*) – dirigido y no dirigido
- Grafo simple – no tiene ciclos ni arcos paralelos
- Multigrafo – no hay restricciones en el # de arcos entre nodos
- Grafo completo – arcos entre cada par de nodos
- Grafo bipartita – dos subconjuntos de nodos
- Grafo pesado – pesos asociados a nodos y/o arcos
- Grafo acíclico dirigido (DAG) – no hay circuitos dirigidos

# Subgrafos

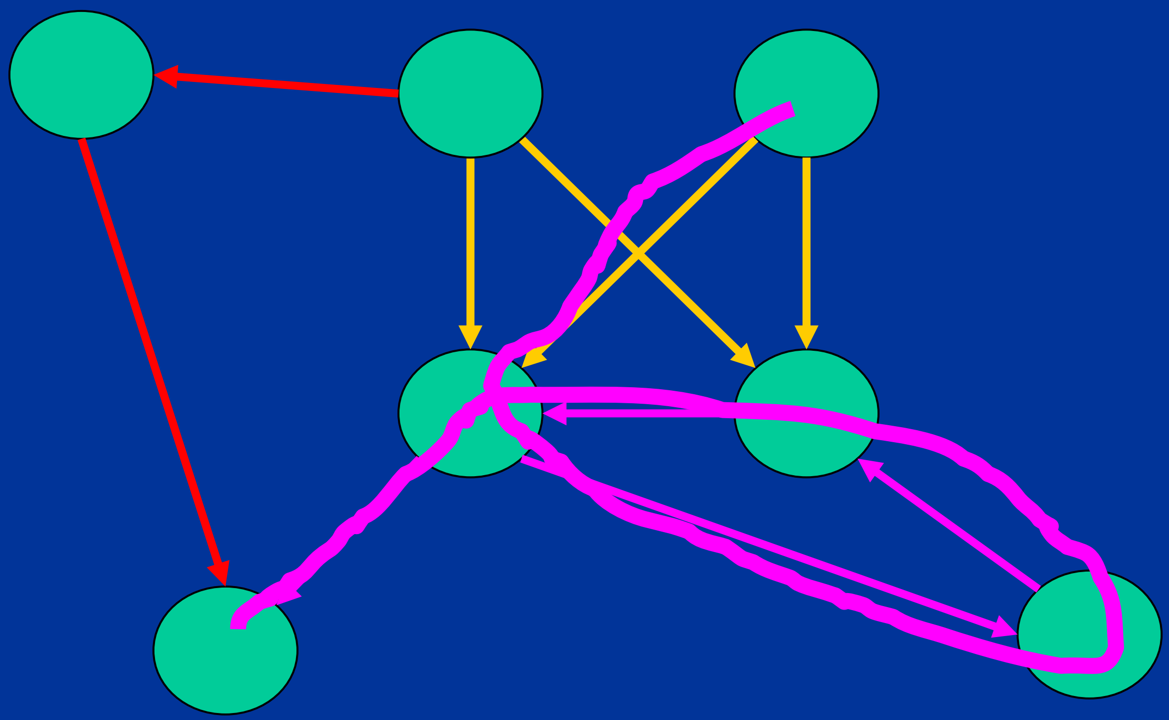
- G’ = (V’, E’) es un subgrafo de G = (V, E) si:
  - V’ es un subconjunto de V
  - E’ es un subconjunto de E
  - Los arcos en E’ son sólo incidentes en vértices en V’

# Trayectorias

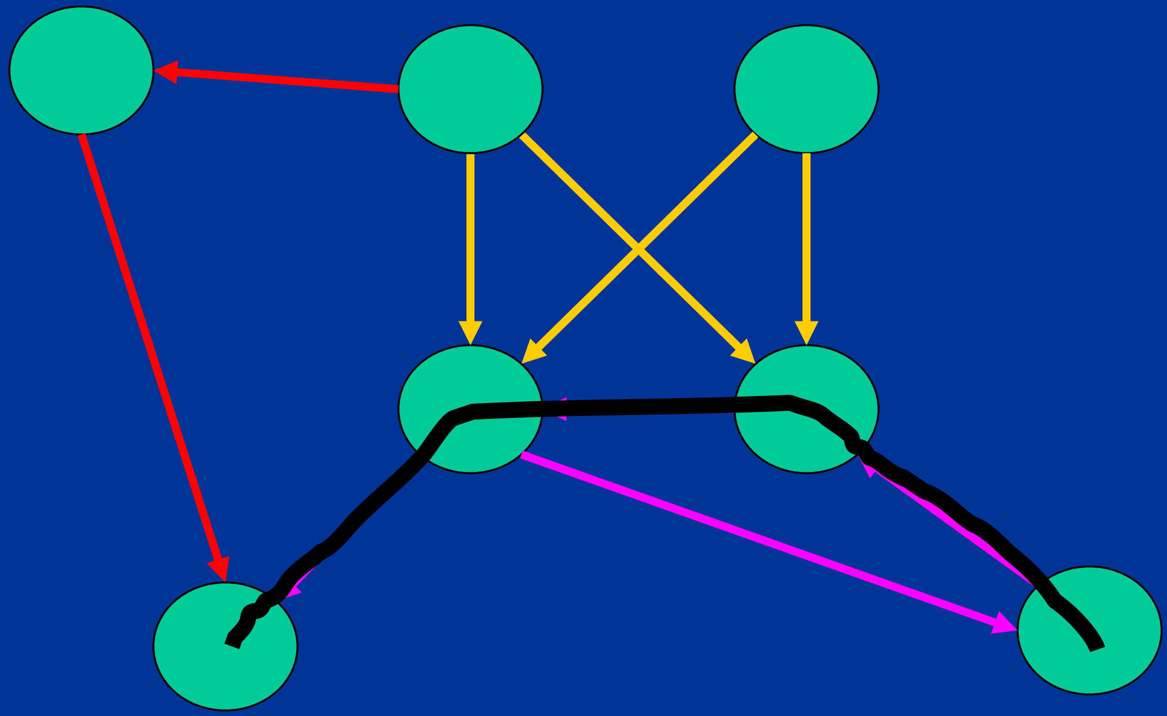
- En un grafo dirigido, una trayectoria es una secuencia de orillas, tal que el vértice inicial de cada orilla coincida con el vértice inicial de la siguiente

- <u>Simple</u>: no incluye la misma orilla (arco) 2 veces
- <u>Elemental</u>: no incide en el mismo vértice (nodo) 2 veces

# Trayectorias



# Trayectorias

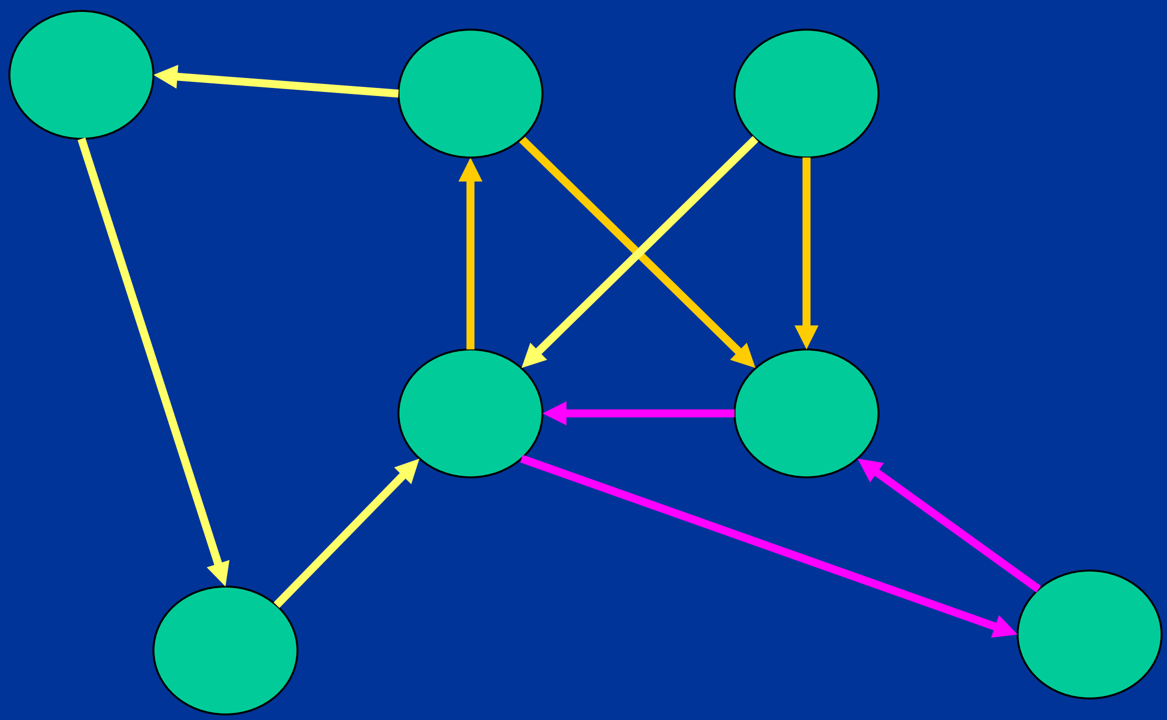


# Circuitos

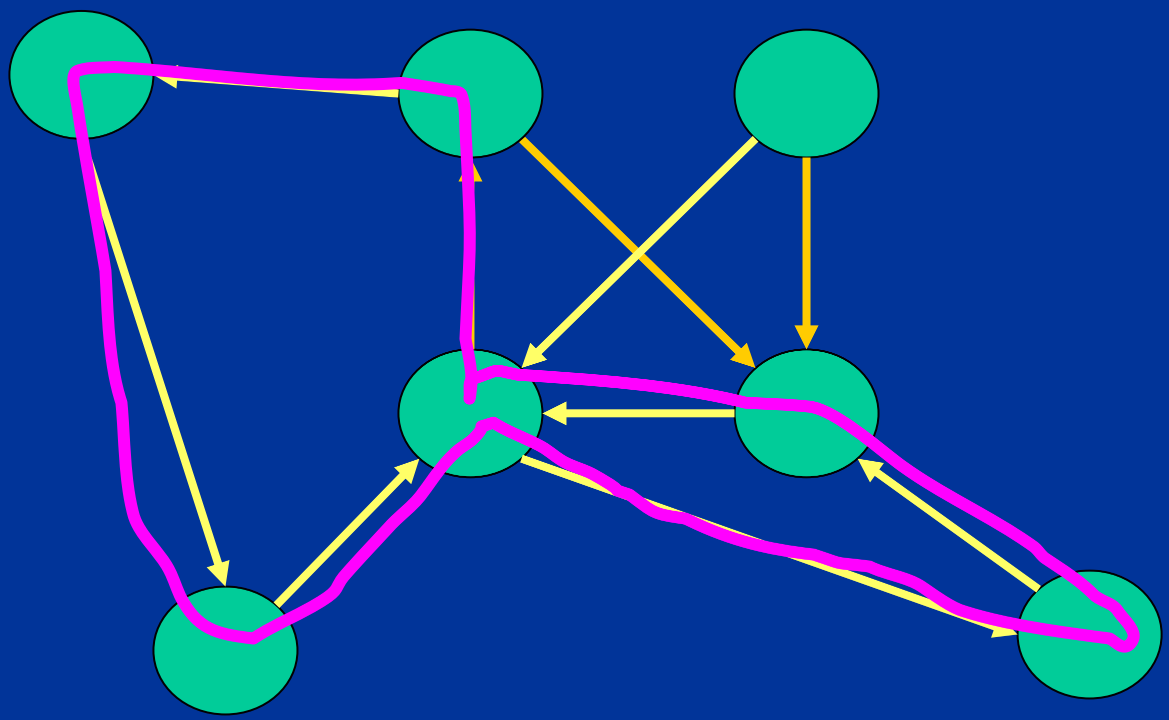
- Un circuito es una trayectoria en que el vértice inicial coincide con el final

- Circuitos simples
- Circuitos elementales

# Circuitos



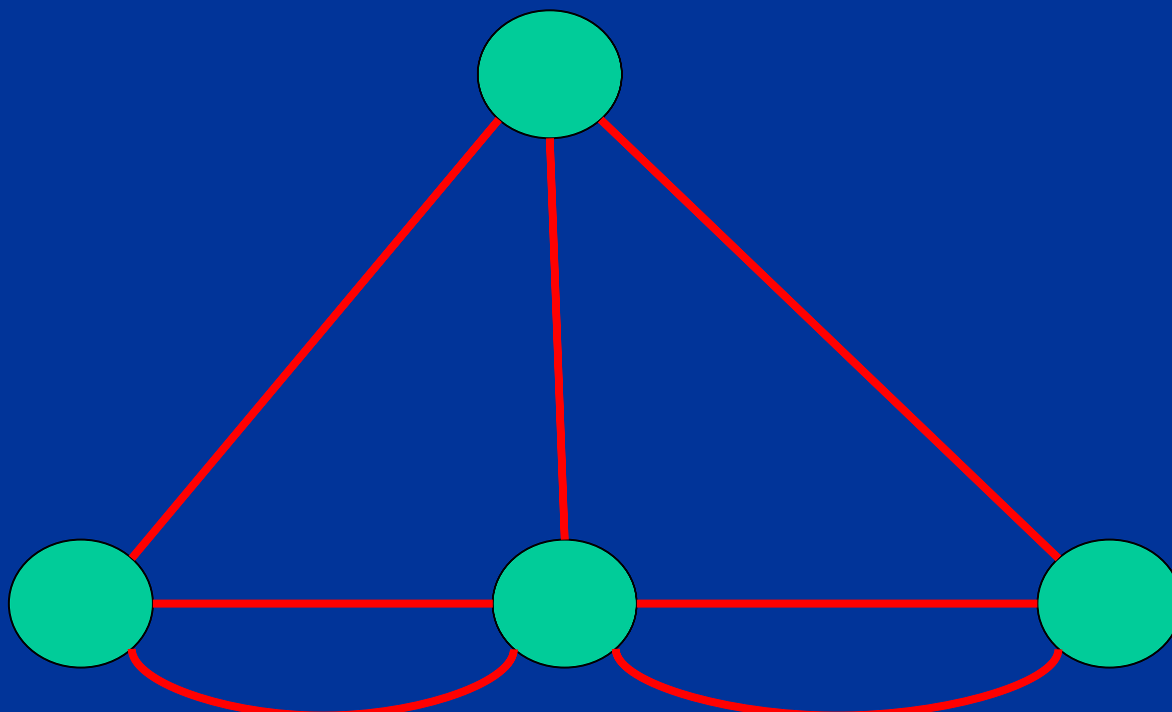
# Circuitos



# Problemas de Trayectorias y Circuitos

- Encontrar si existe una trayectoria entre un par de nodos
- Encontrar la trayectoria más corta entre un par de nodos
- Encontrar trayectoria / circuitos que pasen por cada orilla una vez (Euler)
- Encontrar trayectoria / circuito que pase por cada vértice una vez (Hamilton)

# Problema de Euler



# Trayectoria y Circuitos Euler

Teorema 2

- Un grafo no dirigido tiene una trayectoria de Euler si el número de nodos de grado impar es 0 o 2

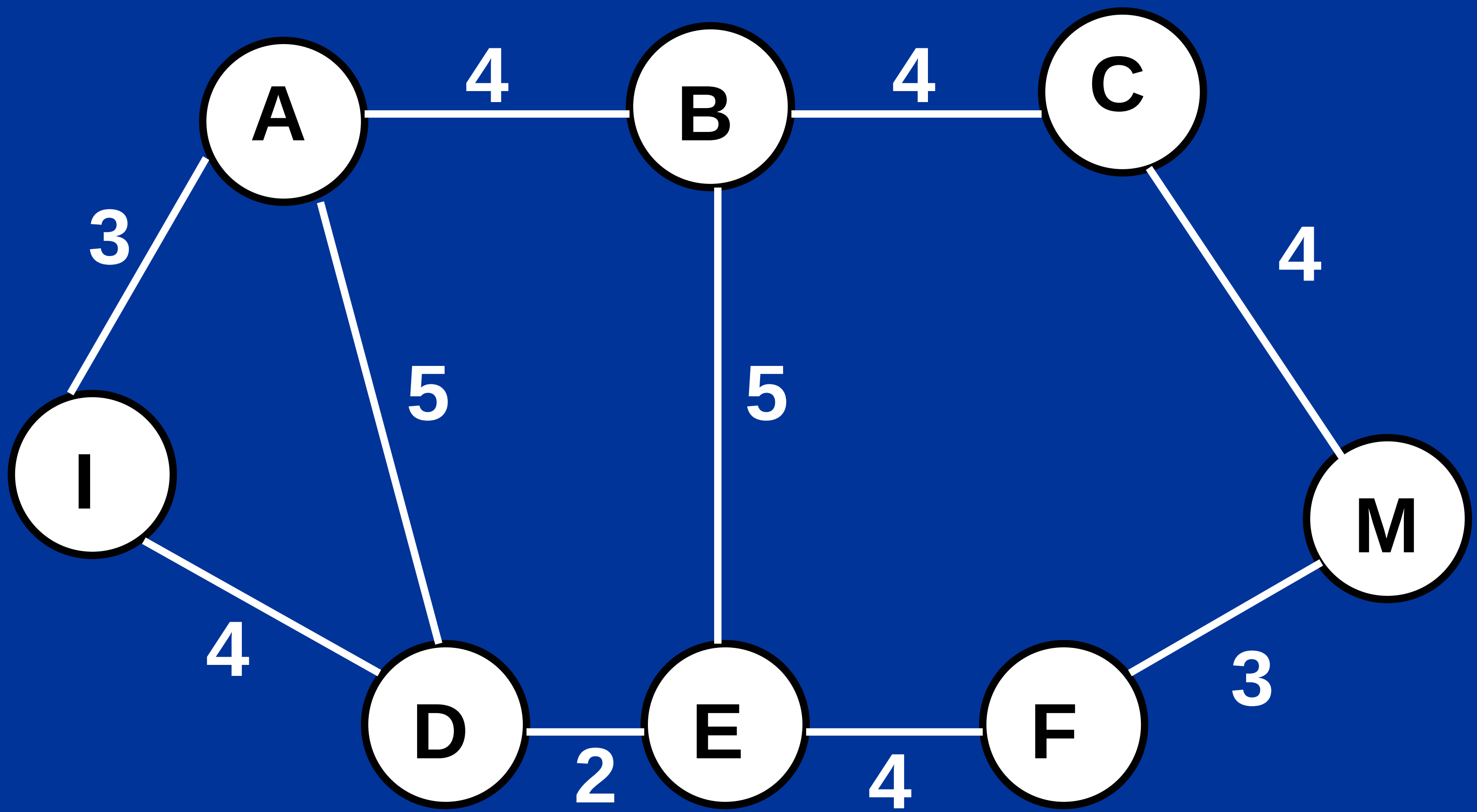
Teorema 3

- Un grafo no dirigido tiene un circuito de Euler si todos los nodos tienen grado par

# Problema del Agente Viajero

- Dado un grafo pesado con pesos asociados a cada arco, encontrar un circuito de Hamilton del menor peso (suma de los pesos de los arcos en el circuito)

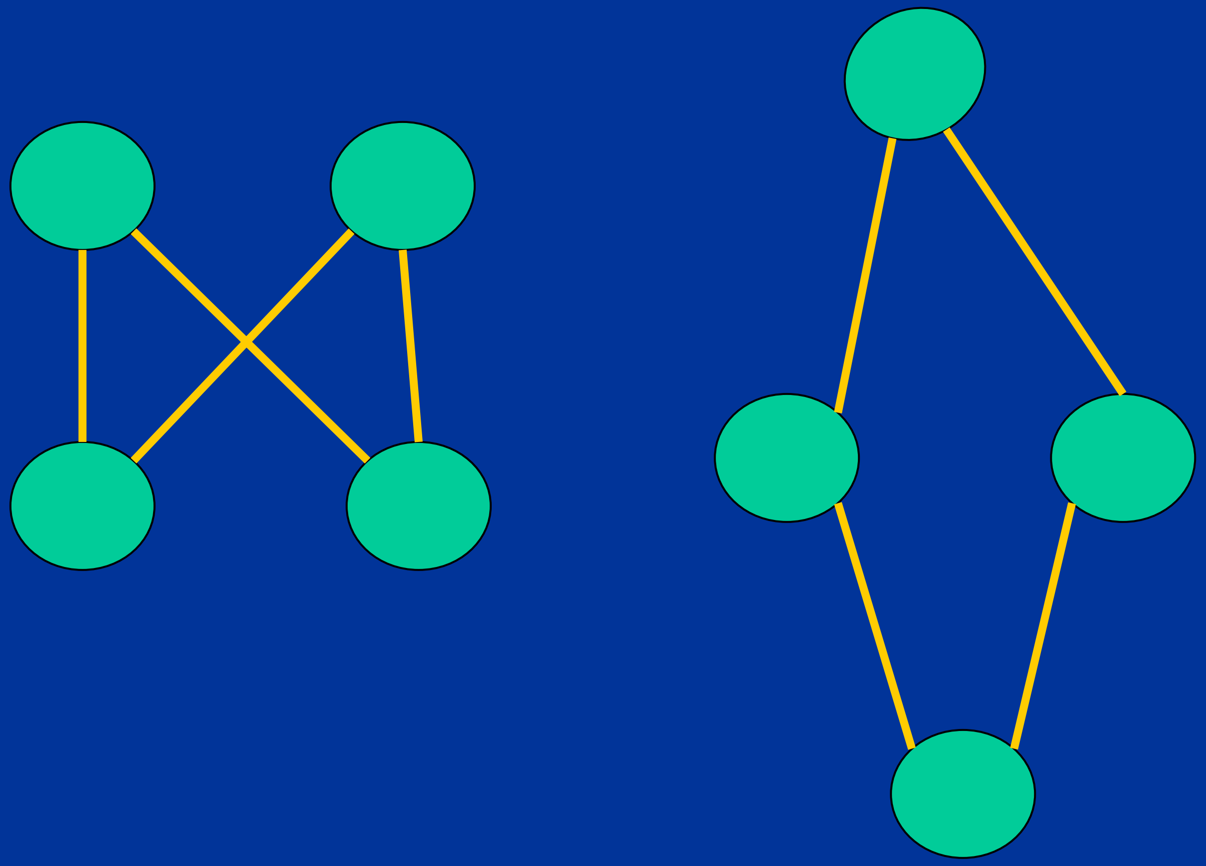
# Problema del Agente Viajero



# Isomorfismo entre Grafos

- Dos grafos son isomorfos si existe una correspondencia 1:1 entre nodos y orillas de forma que se mantengan las incidencias
- Isomorfismo de subgrafos: un grafo es isomorfo a un subgrafo (subconjunto de nodos y orillas) de otro grafo

# Isomorfismo entre Grafos



# Tipos de isomorfismos

- Isomorfismo de grafos
  – correspondencia 1:1 entre dos grafos G1 - G2
- Isomorfismo de subgrafos
  – correspondencia entre un grafo G1 y los subgrafos de G2
- Doble isomorfismo de subgrafos
  – correspondencia entre los subgrafos de G1 y los subgrafos de G2

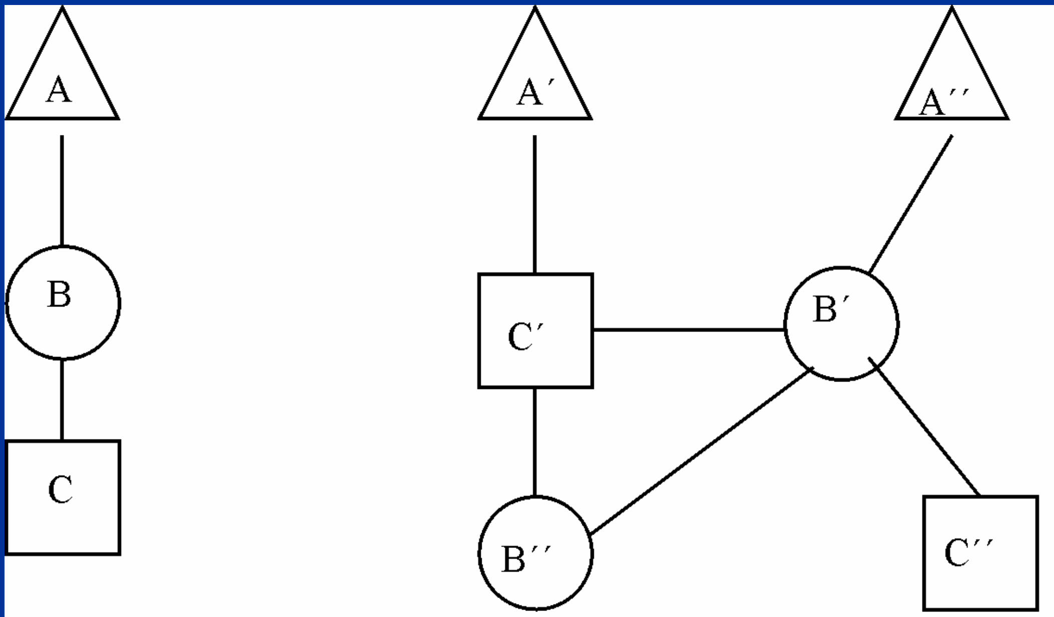
# Técnicas para isomorfismo

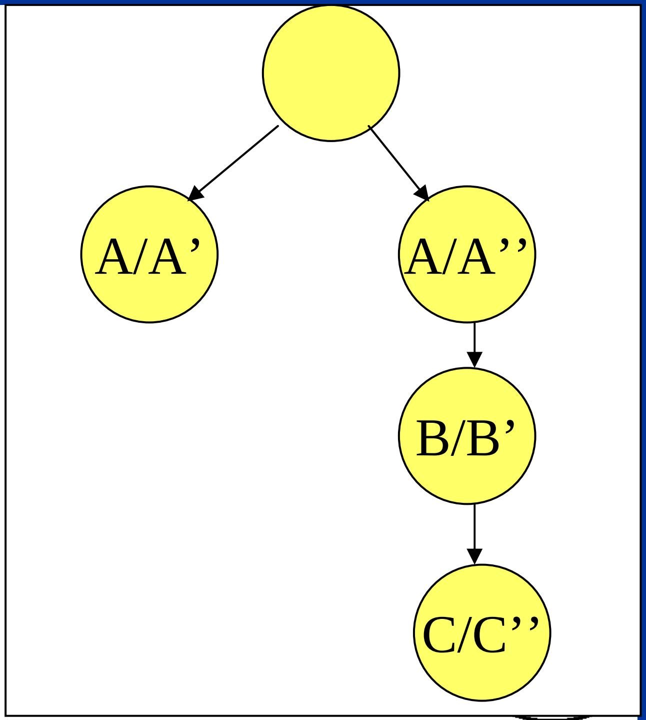
- Búsqueda con *backtracking*
- Búsqueda de *cliques*

# Búsqueda con *backtracking*

- Se construye un árbol en el que las trayectorias corresponden a isomorfismos:
  - se toma un nodo de G1 y todas sus posibles correspondencias en G2 (primer nivel)
  - se buscan los nodos conectados a los nodos correspondientes del primer nivel (segundo nivel)
  - se continua hasta que no existan correspondencias
  - las trayectorias en el árbol corresponden a isomorfismos de subgrafos entre G1 y G2

# Búsqueda con *backtracking*

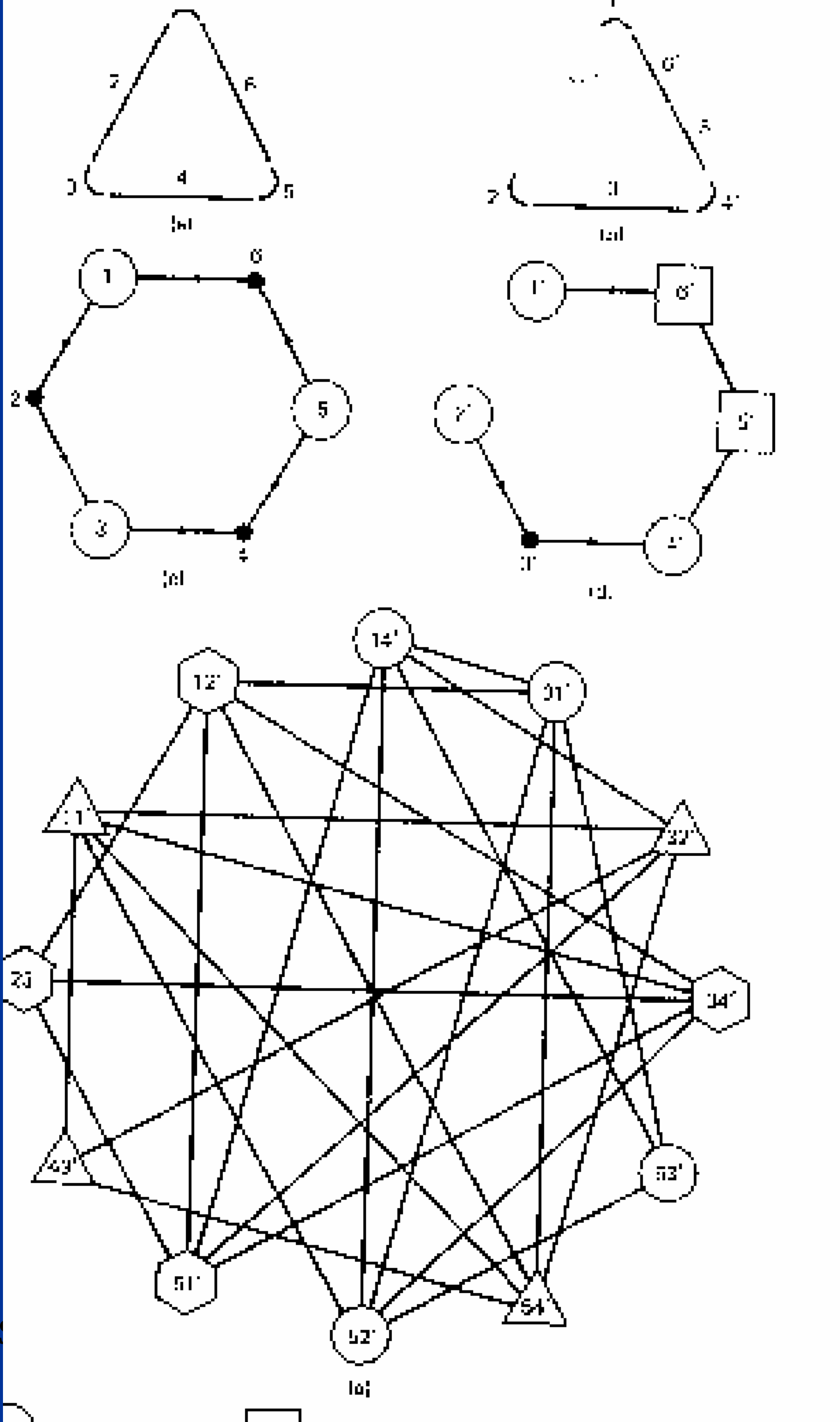


# Búsqueda de *cliqués*

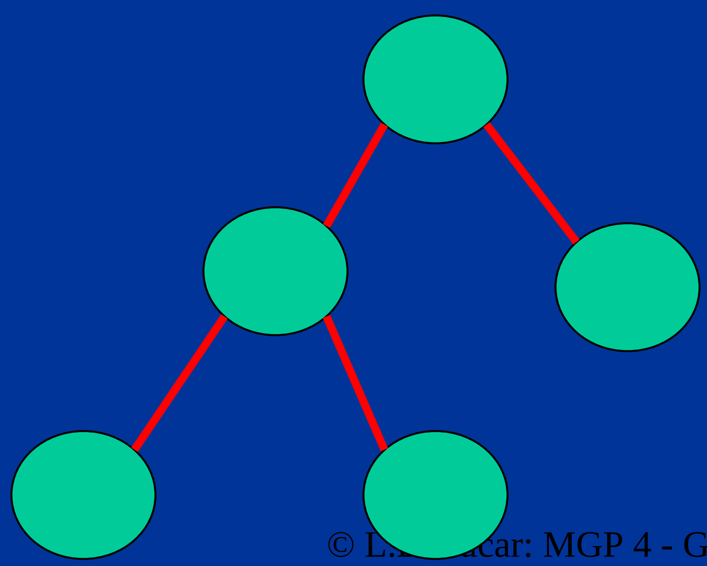
- *Cliqué*: conjunto de nodos en un grafo que están todos conectados entre sí (se define más adelante)
- Algoritmo:
  - construir un grafo asociativo entre *G1* y *G2*
  - buscar cliqués en el grafo asociativo
  - cada cliqué corresponde a un isomorfismo
- Grafo asociativo:
  - un nodo por cada par de nodos compatibles
  - ligas entre nodos conectado en grafos originales

# Búsqueda de cliqués



# Árbol

- Grafo conectado no dirigido que no contiene circuitos simples
  - – Hoja o nodo terminal: grado 1
  - – Nodo rama o interno: grado > 1

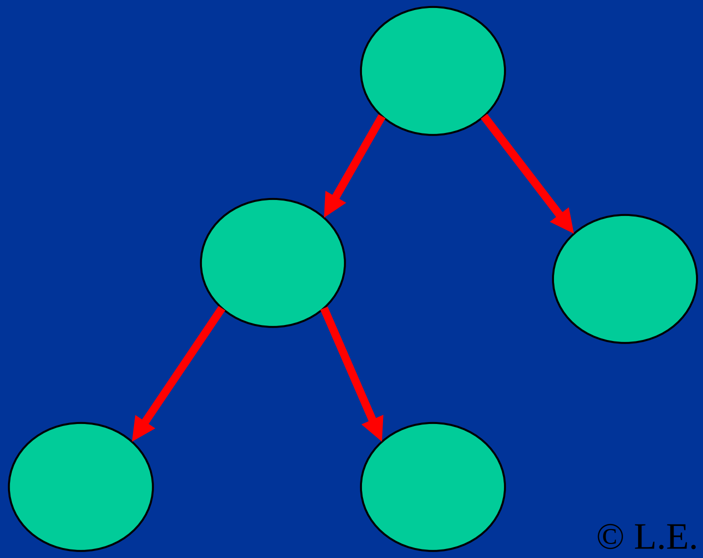


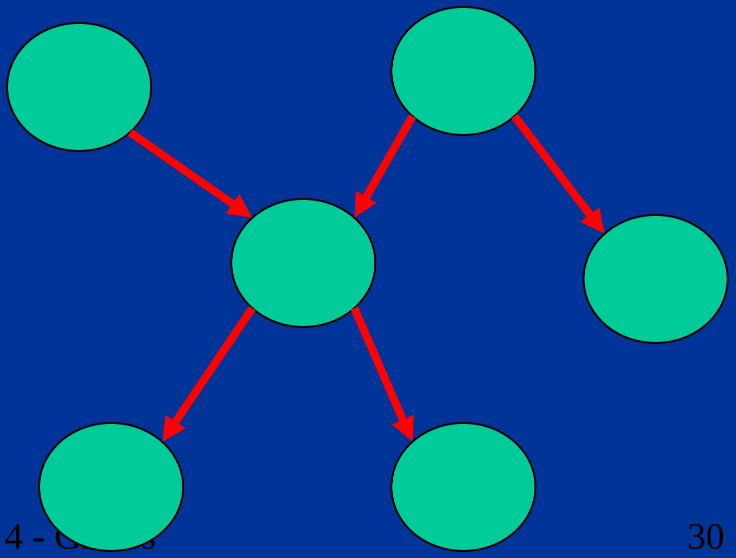
# Árbol

- Propiedades:
  - Hay una trayectoria simple entre cada par de nodos
  - El número de nodos = número de orillas + 1
  - Un árbol con 2 o más nodos tiene al menos dos nodos hoja

# Árboles dirigidos

- Árbol (enraizado): un nodo con grado de entrada 0 (raíz) y los demás con 1
- Poliárbol (árbol dirigido): se vuelve un árbol al quitar las direcciones





# Árbol dirigido

- Terminología:
  - Raíz: vértice con grado de entrada 0
  - Hoja: vértice con grado de salida 0
  - Interno: vértice con grado de salida > 0
  - Hijo / Padre: arco de A a B, A es padre de B y B es hijo de A
  - Hermanos: tienen el mismo padre
  - Descendientes / Ascendientes: trayectoria de A a B, A es ascendiente de B y B es descendiente de A

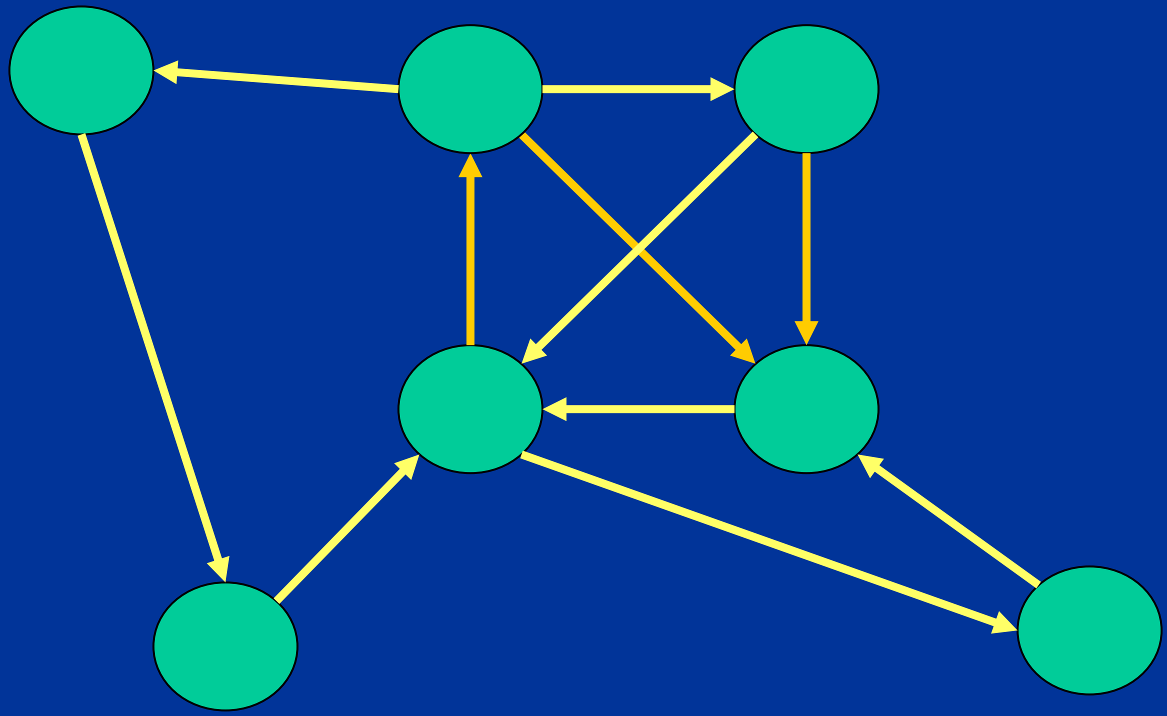
# Árbol dirigido

- Terminología:
  - Subárbol con A raíz: A y todos sus descendientes
  - Subárbol de A: subárbol con hijo de A como raíz
  - Árbol ordenado: arcos salientes de cada nodo etiquetados con enteros
  - Árbol de aridad "m": cada nodo rama (raíz o interno) tiene máximo *m* hijos. Es regular si c/u tiene exactamente *m* hijos (binario *m* =2)

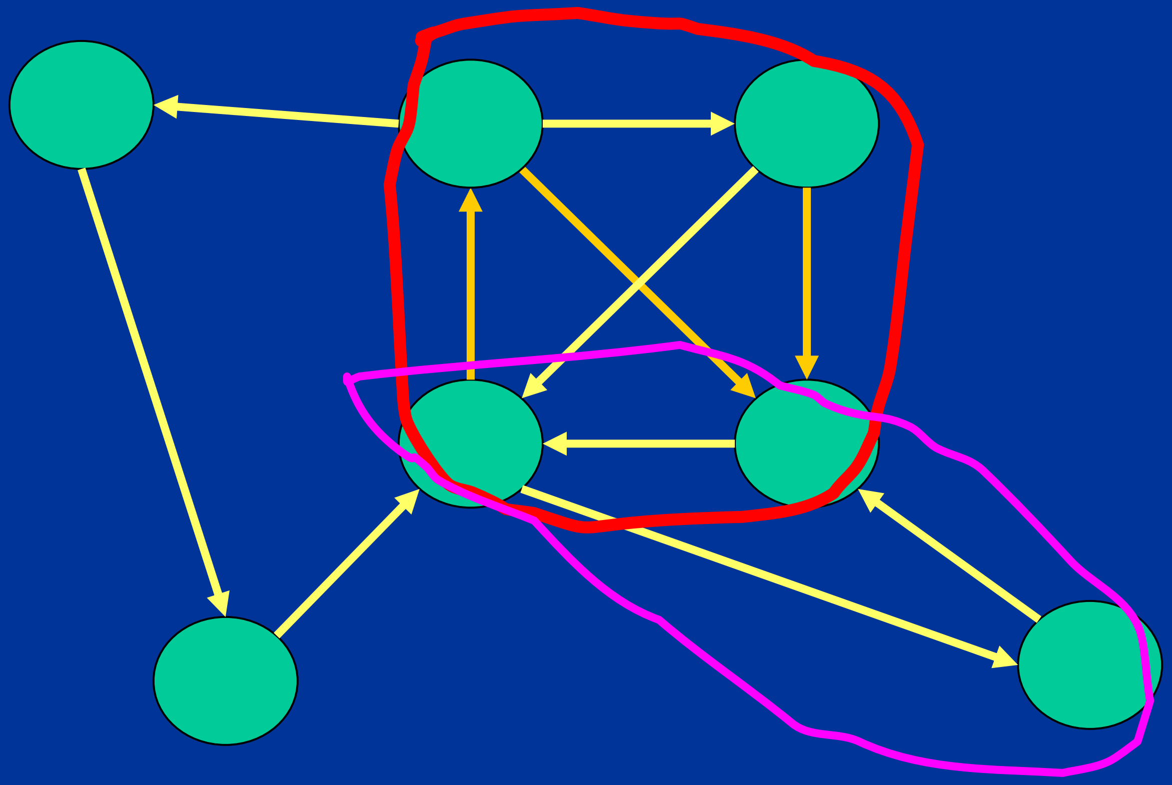
# Clique

- Grafo completo: cada par de nodos distintos son adyacentes
- Conjunto completo: subconjunto W de G que induce un subgrafo completo de G
- Clique: subconjunto de nodos que es conjunto completo y máximo (no hay un conjunto completo que lo contenga)

# Cliques



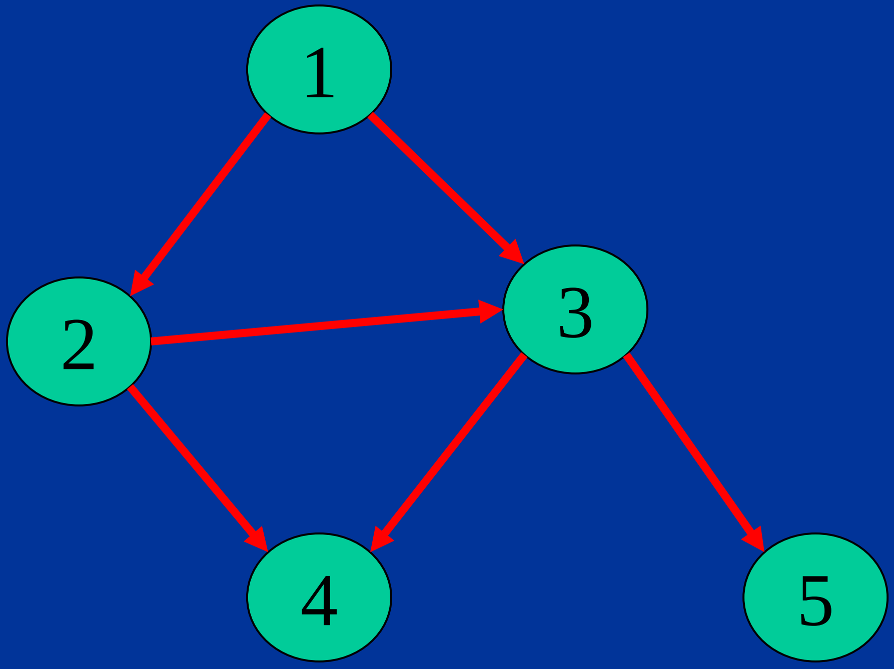
# Cliques



# Ordenamiento Perfecto

- Un ordenamiento $O = [v_1, v_2, ...., v_n]$ de los nodos es perfecto si todos los vecinos anteriores al nodo están completamente conectados

# Ordenamiento Perfecto

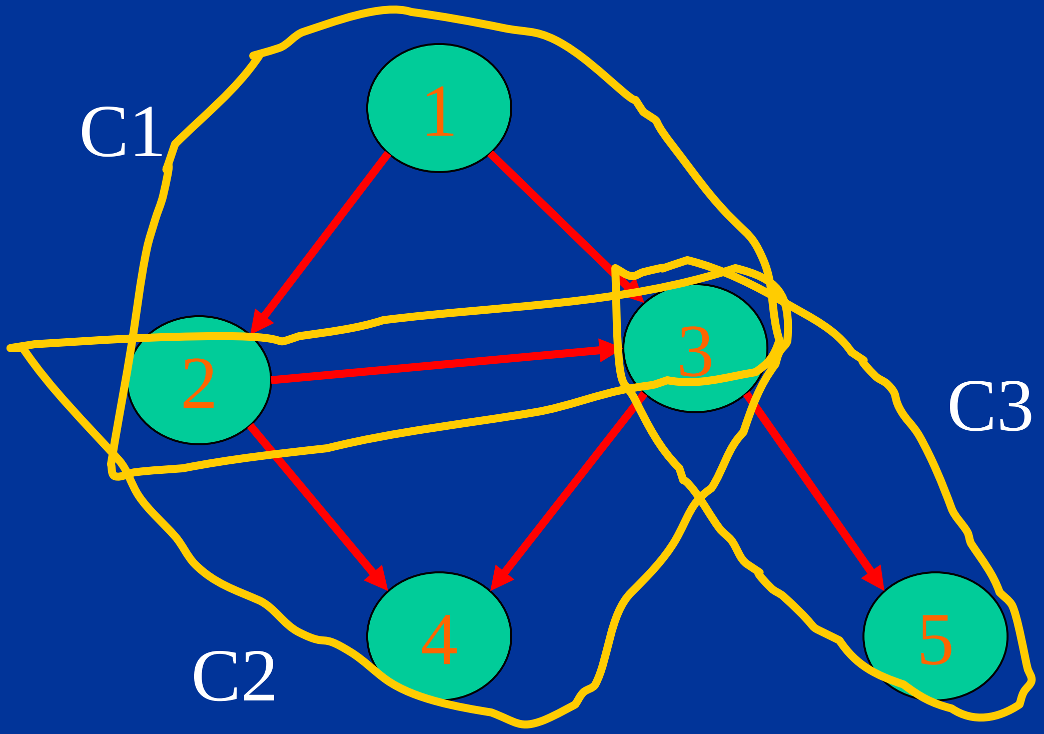


# Ordenamiento de Cliques

- Un ordenamiento de *cliques* $[C_1, C_2, \ldots C_p]$ tiene la propiedad de intersección secuencial si todos los nodos comunes con *cliques* previos están contenidos en el mismo *clique* (padre)

- Esto se cumple si los nodos tienen un ordenamiento perfecto y los *cliques* se ordenan de acuerdo al nodo con número mayor

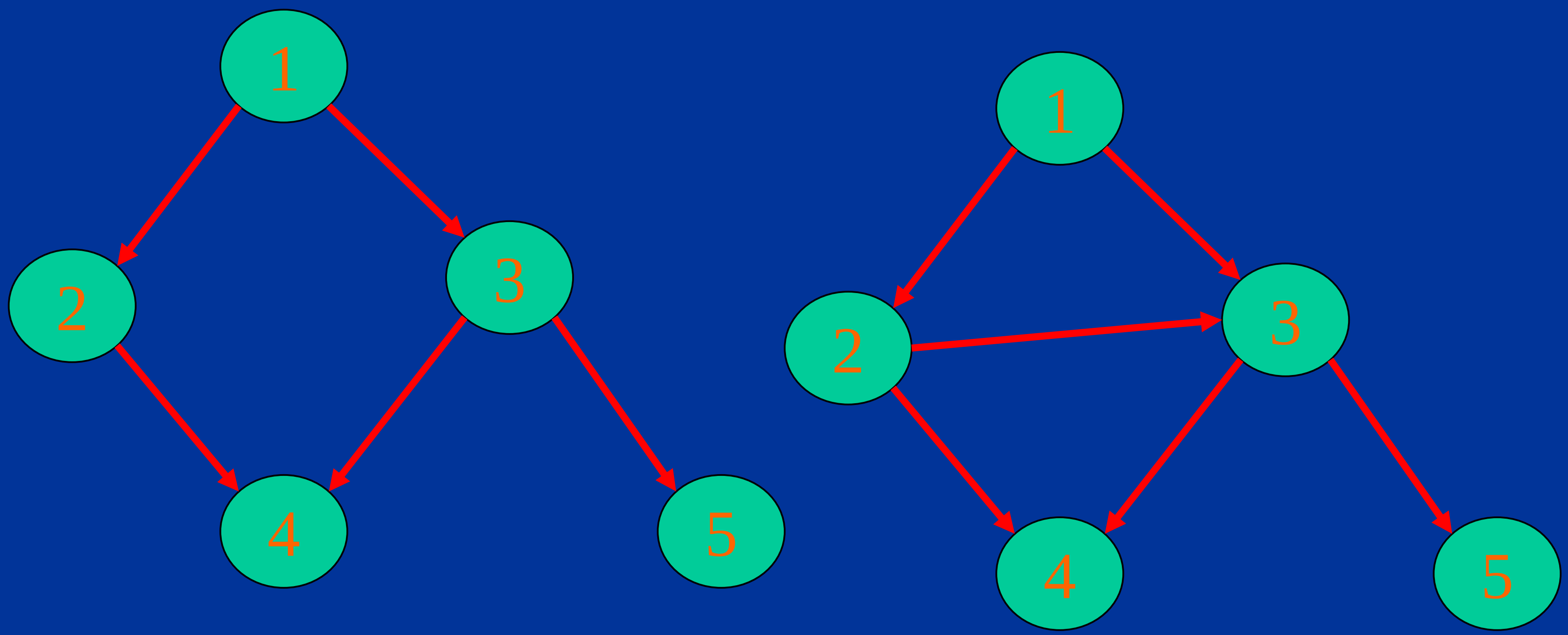
# Ordenamiento de Cliques



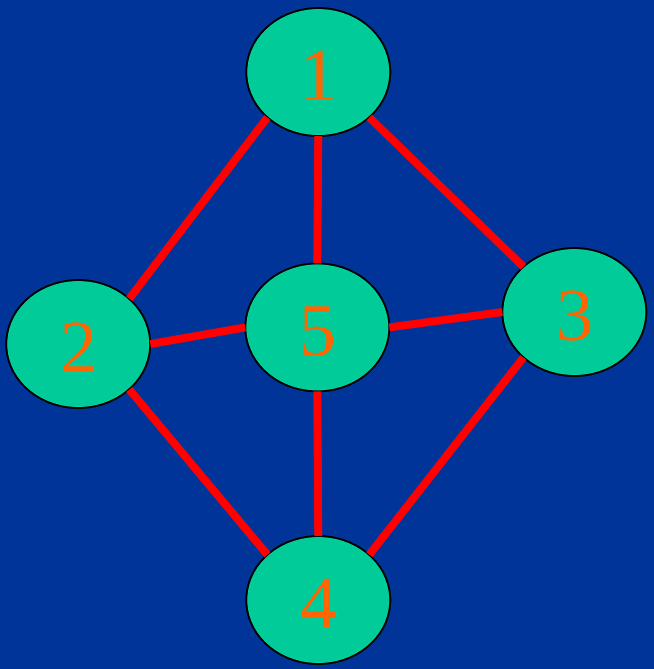
# Grafos Triangulados

- Un grafo dirigido es triangulado si cada circuito simple de longitud > 3 tiene una cuerda
- Para tener un ordenamiento de *cliques* con la propiedad de intersección secuencial es necesario que el grafo sea triangulado

# Grafos Triangulados



# Grafos Triangulados

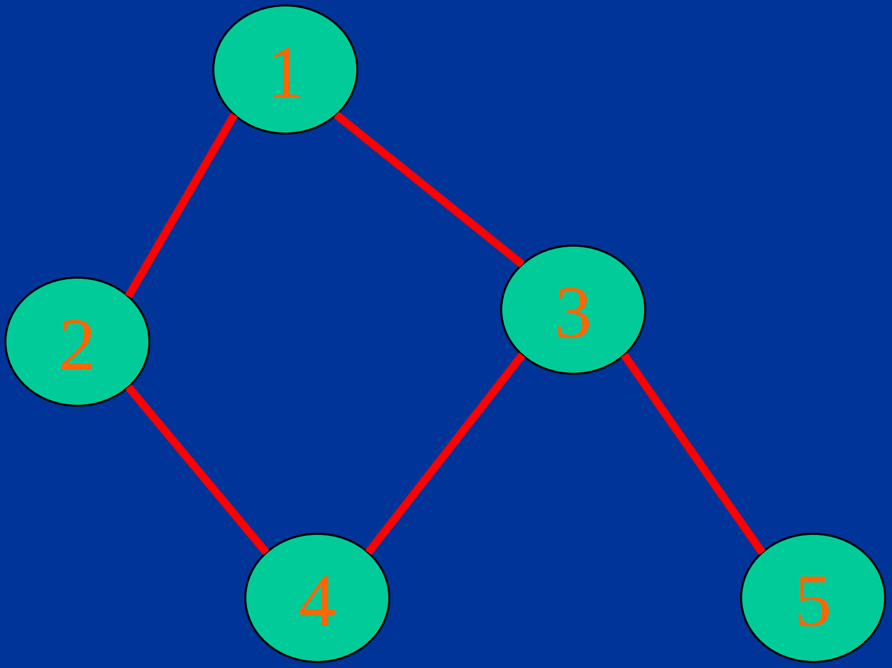


# Búsqueda de Máxima Cardinalidad

- Para obtener un ordenamiento de nodos con máxima cardinalidad:
  1. Seleccionar cualquier nodo como inicial: 1
  2. Seleccionar el nodo adyacente al mayor número de vértices previamente numerados y asignarle el siguiente número
  3. Romper empates en forma arbitraria
- Si el grafo es triangulado, este algoritmo provee un ordenamiento perfecto

# Ejemplo

- Ordenamiento de acuerdo a búsqueda de máxima cardinalidad

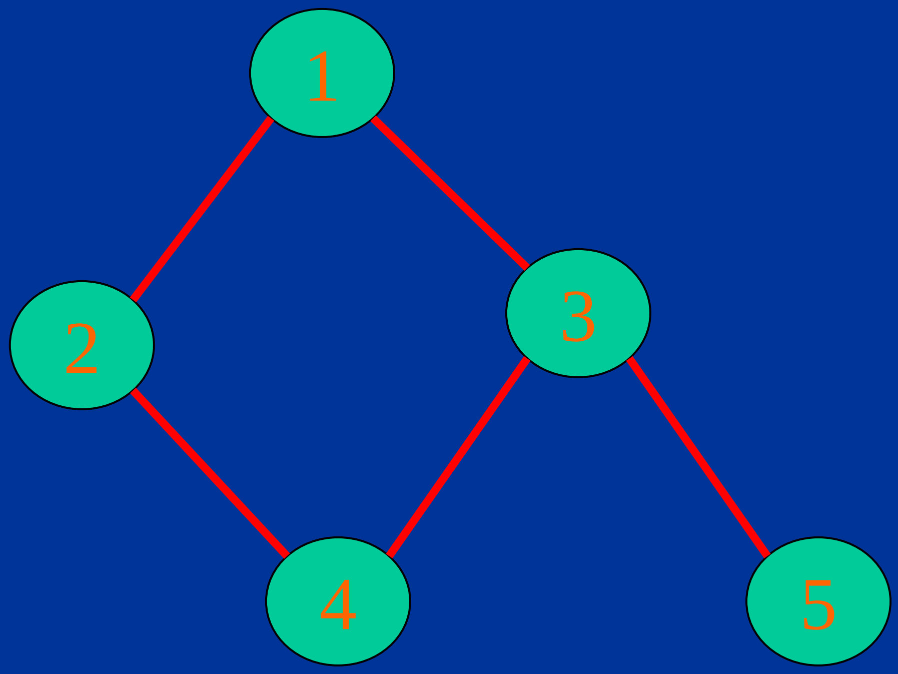


# Algoritmo de triangularización

- Ordenar los nodos de acuerdo a máxima cardinalidad
- Obtener el llenado del grafo:
  – Procesar los vértices en orden inverso, de $n$ a 1
  – Para cada nodo $w$ obtener los nodos de índice mayor que estén conectados a $w$ y llamarlos $A$
  – Agregar arcos a nodos mayores (sucesores) que no están contenidos en $A$

# Ejemplo

- Triangulación

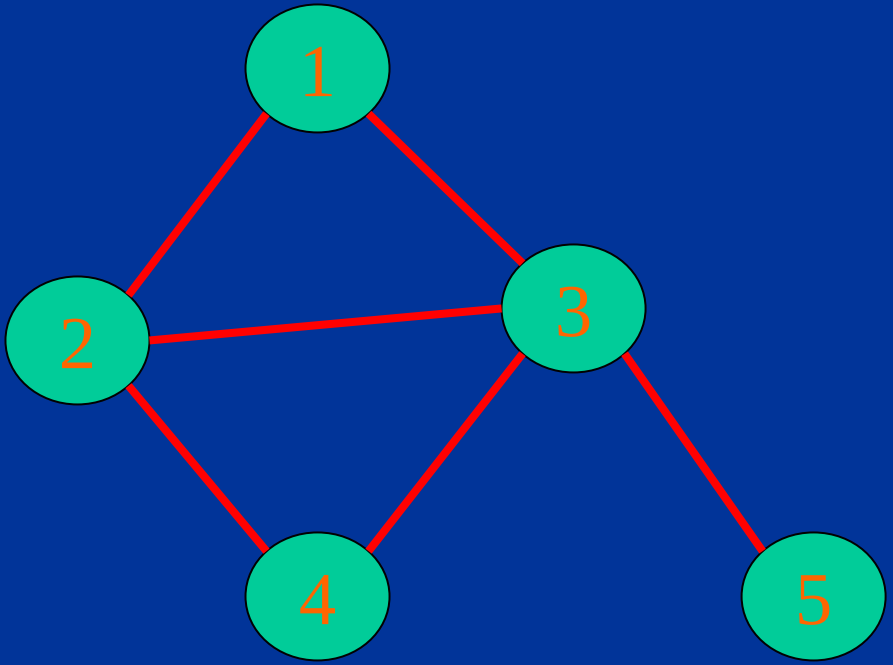



Conjuntos “A”:

- 5:
- 4:
- 3: 4 y 5
- 2: 4 – arco de 2 a 3
- 1: 2 y 3

# Ejemplo

- Grafo triangulado



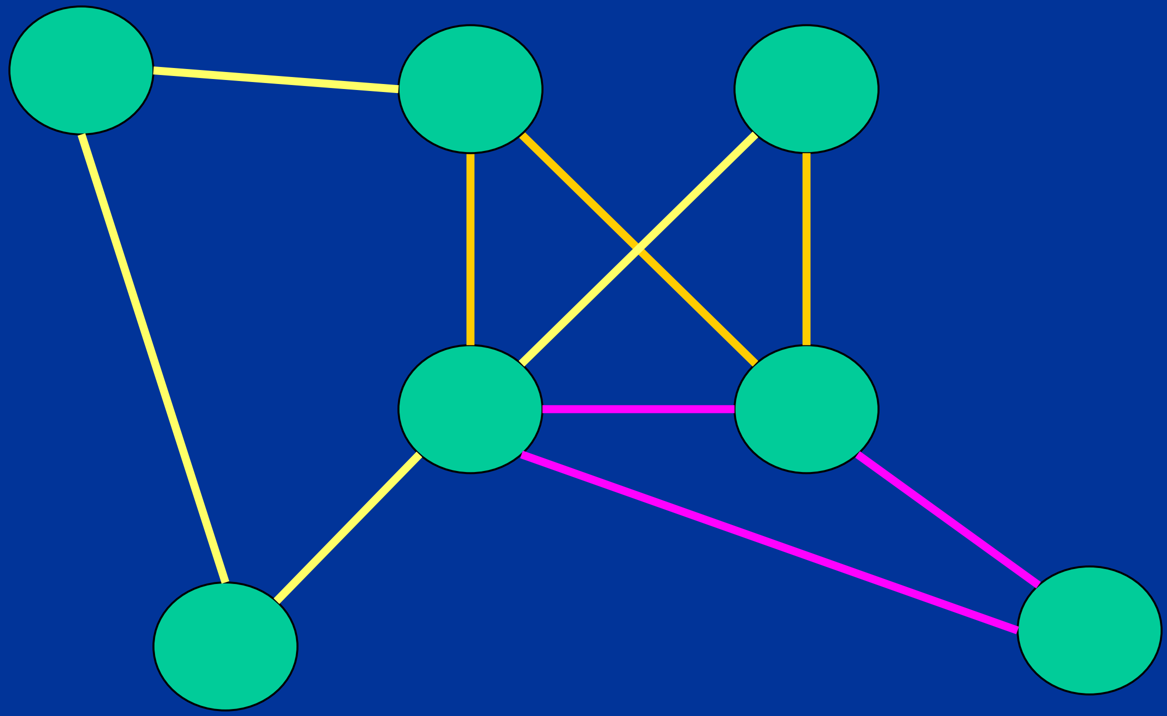
# Referencias

- Liu, Cap. 5
- Libros de matemáticas discretas o teoría de grafos, por ejemplo:
  - R. Gould, Graph Theory, Benjamin/Cimmings, 1988

# Ejercicios

1. Demuestra el teorema 1
2. Para el siguiente grafo (figura 1), determina:
   a) Si existe una trayectoria de Euler
   b) Si existe una trayectoria de Hamilton
   c) Si el grafo es triangulado
   d) Si no es triangulado, hazlo triangulado
   e) Los cliques del grafo

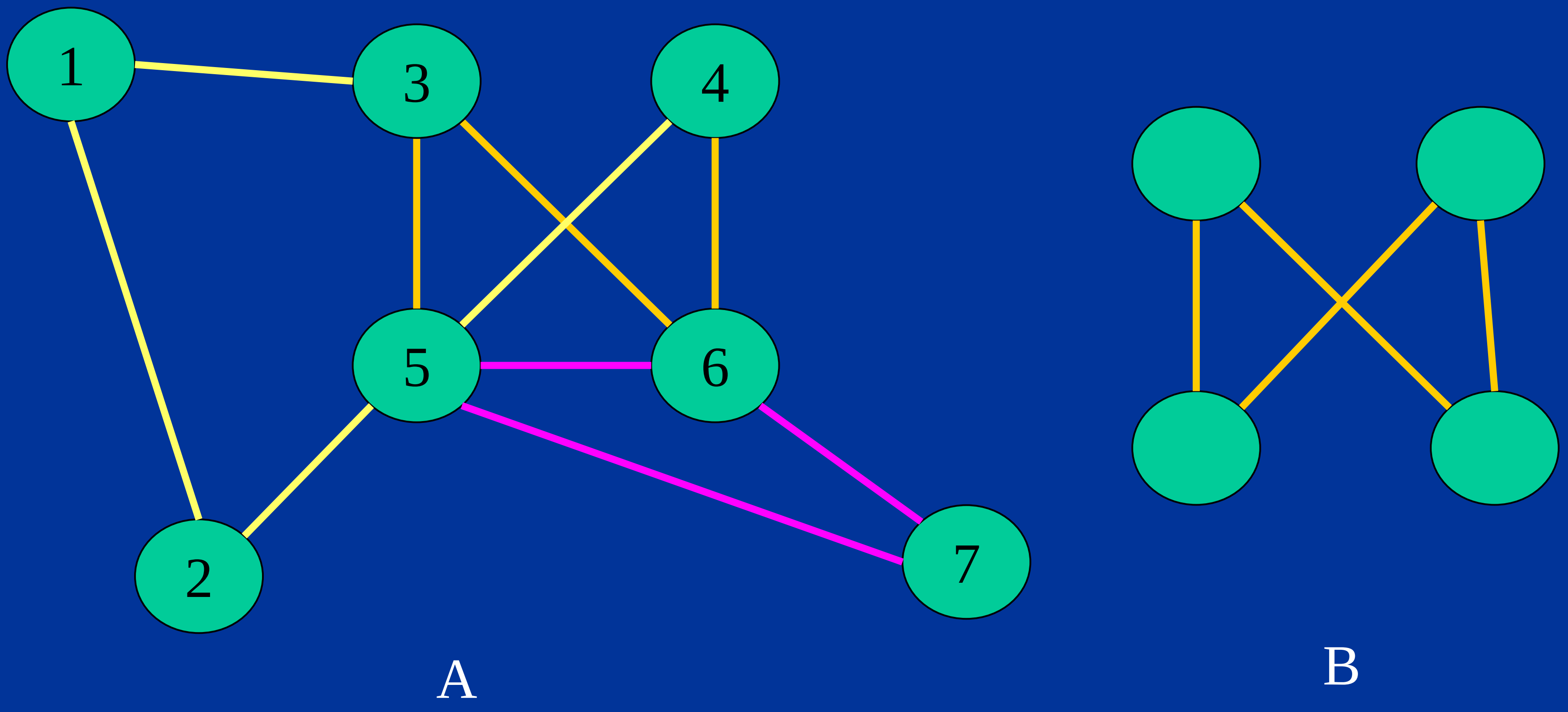
# Figura 1



# Ejercicios

3. Demuestra el teorema 2
4. Para los grafos en la siguiente figura (figura 2):
   a) Encuentra los subgrafos de A que son isomorfos a B
   b) Triangula el grafo A y ordena los nodos de acuerdo a máxima cardinalidad
5. Encuentra la mejor ruta para el agente viajero en el siguiente mapa (figura 3)

# Figura 2



# Figura 3